L3-SPC - Corrigé des exercices de l'examen terminal de janvier 2012.

II. Cylindre conducteur dans une double gaine diélectrique.

1) $\dfrac{\vec{D}(M)}{\|\vec{D}(M)\|} = \vec{e}_\rho$ car $\vec{D}$ est un vrai vecteur et appartient donc au plan de symétrie contenant l'axe de symétrie du cylindre et le point M considéré. De plus le cylindre peut être considéré comme infiniment long (car $L >> a$) et donc tout plan $\perp$ axe Δ est aussi un plan de symétrie : il en résulte que $\vec{D}$ ne peut avoir de composante selon $\vec{e}_z$.

2) La charge portée par le cylindre conducteur est :
$Q = \sigma \cdot S_{lat.} = \sigma \times 2\pi a h$.

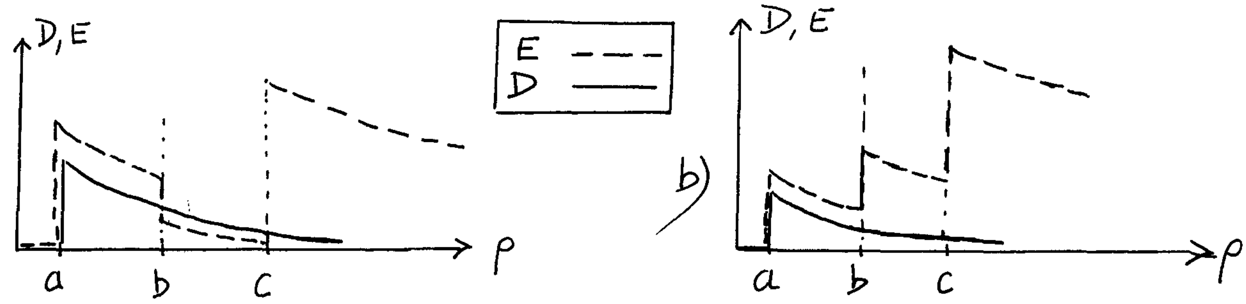
3) Théorème de Gauss : $\oint_{S\,fermée} \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = Q_{int}$; compte tenu de la symétrie

$\int_{S\,lat.} D.dS = Q \Rightarrow D = \dfrac{Q}{2\pi\rho h}$ pour $\rho > a$, soit $\vec{D} = D.\vec{e}_\rho = \dfrac{Q}{2\pi\rho h}\cdot\vec{e}_\rho$

Pour $\rho < a$ on a $\vec{D} = \vec{0}$.

4) Pour $\rho < a$, $\vec{E} = \vec{0}$; pour $a < \rho < b$, $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}(\rho)}{\varepsilon_{1r}\,\varepsilon_0}$; pour $b < \rho < c$, $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}(\rho)}{\varepsilon_{2r}\cdot\varepsilon_0}$; pour $\rho > c$, $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\rho h\,\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_\rho$

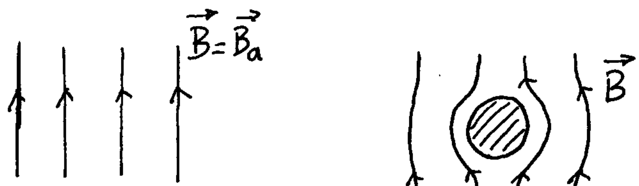
5)



III. Sphère supraconductrice.

1) $\vec{B}_{in} = \vec{0}$

2)



Avant

Après introduction de la sphère.

3) $\vec{B}_a + \vec{B}_{m,in} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_a = -\vec{B}_{m,in} \underset{(I)}{=} -\frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \Rightarrow \vec{M} = -\frac{3}{2}\,\dfrac{\vec{B}_a}{\mu_0}$

4) $\vec{J}_s = \vec{M}\times\vec{n} = -\frac{3}{2}\,\dfrac{\vec{B}_a}{\mu_0}\times\vec{n} = -\frac{3}{2}\cdot\dfrac{B_a}{\mu_0}(\vec{e}_z\times\vec{e}_r) = -\frac{3}{2}\dfrac{B_a}{\mu_0}\sin\theta.\vec{e}_\varphi$

5) $B_{ex,r} = B_{ex,normal} = 0$; $B_{ex,\theta} = B_{ex,tangent} = \mu_0 J_s = -\frac{3}{2}B_a\cdot\sin\theta$

IV Permittivité complexe et propagation dans un conducteur imparfait. (2)

1) L'équation d'onde s'écrit : $-\underline{k}^2 \vec{E}_m + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon}_r \vec{E}_m = \vec{0}$

d'où la relation de dispersion : $\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 0$

2) $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon}_r = k_0^2 \underline{\varepsilon}_r$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$; $\underline{k} = k_0\sqrt{\underline{\varepsilon}_r} = k_0 \cdot \underline{n}$.

3) n est l'indice de réfraction, K est l'indice d'extinction ou coefficient d'extinction.

$\underline{k} = k' + i k'' = k_0(\underbrace{n + iK}_{\underline{n}})$.

$\varepsilon_r' = 1 + \chi' = n^2 - K^2$

$\varepsilon_r'' = \chi'' = 2nK$

4) L'équation de Drude, en régime harmonique, donne avec

$\vec{E} = \vec{E_0}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ et $\vec{u} = \underline{U}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ (déplacement des électrons)

$$\left\{-m\omega^2 \underline{\vec{U}} = q\,\underline{\vec{E_0}} + i\,\frac{m\omega}{\tau}\underline{\vec{U}} - m\,\omega_0^2\,\underline{\vec{U}}\right\} \Rightarrow \underline{\vec{U}} = \frac{q}{m}\,\frac{\underline{\vec{E_0}}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\,\frac{\omega}{\tau}}$$

Electrons libres $\Rightarrow \omega_0 = 0$ (pas de force de rappel).

$$\vec{P} = Nq\,\underline{\vec{U}} = \underline{\chi}(\omega)\cdot\varepsilon_0\cdot\vec{E} \Rightarrow \underline{\chi} = \frac{-(Nq^2/\varepsilon_0 m)}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{1}{1 + \frac{i}{\omega\tau}}$$

où $\omega_p = \left(\frac{N q^2}{\varepsilon_0\, m}\right)^{1/2}$ est la pulsation plasma et caractérise sa réponse électrique.

$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cdot\frac{1}{1 + \frac{i}{\omega\tau}}$; τ est le temps de relaxation et caractérise l'interaction avec le milieu (collisions électron-phonon, électron-électron, etc...)

5) $$\underline{\varepsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{\left(1 - \frac{i}{\omega\tau}\right)}{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}\right] + i\left[\frac{\omega_p^2/(\omega\tau)}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}\right] = (n + iK)^2 = \underbrace{n^2 - K^2}_{\varepsilon_r'} + \underbrace{2inK}_{i\varepsilon_r''}$$

$$n^2 - K^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} = B \quad \text{et} \quad 2nK = \frac{\omega_p^2/(\omega\tau)}{\omega^2 + \tau^{-2}} \Rightarrow K = \frac{A}{n} \text{ où } A = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_p^2(\omega\tau)^{-1}}{\omega^2 + \tau^{-2}}$$

---

principe du Calcul

6) On calcule $n(\omega_p, \omega)$ et $K(\omega_p, \omega, \tau)$ par la résolution de l'équation :

$n^2 - \frac{A^2}{n^2} = B$; posons $X = n^2 \Rightarrow X - \frac{A^2}{X} = B \Rightarrow X^2 - A^2 = BX$ soit :

$X^2 - BX - A^2 = 0$; $\Delta = B^2 + 4A^2 > 0$; $X = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ d'où n et K

En développant le calcul avec les approximations demandées et en négligeant les termes en $\frac{\omega_p^4}{\omega^4}$ devant les termes en $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ($\ll 1$)

on trouve finalement : $n(\omega) \simeq 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

et $K \simeq \frac{1}{2\omega\tau}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$